

*1.7. Dzielenie wielomianów

Przypomnijmy, że podzielenie liczby a przez liczbę b , różną od zera, polega na znalezieniu takiej liczby c , że $a = c \cdot b$. Na przykład $72 : 9 = 8$, ponieważ $72 = 8 \cdot 9$. Podobnie mówimy, że wielomian w jest podzielny przez wielomian $q \neq 0$, jeśli istnieje wielomian p taki, że $w = p \cdot q$.

Przykład 1

$(x^3 + 5x^2 + 6x) : (x + 3) = x^2 + 2x$, ponieważ:

$$x^3 + 5x^2 + 6x = (x^2 + 2x) \cdot (x + 3)$$

Dzielenie wielomianów wykonujemy podobnie jak dzielenie liczb naturalnych.

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $(3x^2 - x - 4) : (x + 1)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ 3x^2 + 3x \\ \hline -4x - 4 \\ -4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 7319 : 13 = 563 \\ -65 \\ \hline 81 \\ -78 \\ \hline 39 \\ -39 \\ \hline 0 \end{array}$$

Poniżej wyjaśniamy, jak wyglądały kolejne kroki przy wykonywaniu tego dzielenia.

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x \\ 3x^2 + 3x \\ \hline -4x - 4 \end{array}$$

dzielimy $3x^2$ przez pierwszy wyraz dzielnika
mnożymy $3x$ przez dzielnik $x + 1$
odejmujemy

$$\begin{array}{r} (3x^2 - x - 4) : (x + 1) = 3x - 4 \\ 3x^2 + 3x \\ \hline -4x - 4 \\ -4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

dzielimy $-4x$ przez pierwszy wyraz dzielnika
mnożymy -4 przez dzielnik $x + 1$
odejmujemy
otrzymaliśmy resztę równą 0

Sprawdzenie: $(3x - 4)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 4x - 4 = 3x^2 - x - 4$.

Ćwiczenie 1

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4)$

c) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$

b) $(9x^2 + 3x - 12) : (x - 1)$

d) $(2x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x) : (x + 2)$

Tak jak iloraz liczb naturalnych nie zawsze jest liczbą naturalną, tak nie zawsze istnieje wielomian p taki, że $w : q = p$. Wykonujemy wówczas dzielenie z resztą.

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $(5x^2 + 13x + 11) : (x + 2)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (5x^2 + 13x + 11) : (x + 2) = 5x + 3 \\ \underline{5x^2 + 10x} \\ 3x + 11 \\ \underline{3x + 6} \\ 5 \end{array}$$

Dzielenie liczb naturalnych

$$\begin{array}{r} 752 : 9 = 83 \\ - 72 \\ \hline 32 \\ - 27 \\ \hline 5 \\ 752 = 83 \cdot 9 + 5 \end{array}$$

W wyniku dzielenia otrzymaliśmy iloraz równy $5x + 3$ oraz resztę równą 5, co oznacza, że: $5x^2 + 13x + 11 = (5x + 3)(x + 2) + 5$.

Sprawdzenie: $(5x + 3)(x + 2) + 5 = 5x^2 + 10x + 3x + 6 + 5 = 5x^2 + 13x + 11$.

Przykład 4

Wykonaj dzielenie $(2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (2x - 3)$. Sprawdź otrzymany wynik.

$$\begin{array}{r} (2x^3 - x^2 - 2x - 5) : (2x - 3) = x^2 + x + \frac{1}{2} \\ \underline{2x^3 - 3x^2} \\ 2x^2 - 2x - 5 \\ \underline{2x^2 - 3x} \\ x - 5 \\ \underline{x - 1\frac{1}{2}} \\ -3\frac{1}{2} \end{array} \quad \text{otrzymaliśmy resztę równą } -3\frac{1}{2}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} (x^2 + x + \frac{1}{2}) \cdot (2x - 3) - 3\frac{1}{2} &= 2x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 3x + x - 1\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = \\ &= 2x^3 - x^2 - 2x - 5 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie wielomianów. Sprawdź otrzymany wynik.

a) $(x^2 - 8x + 19) : (x - 5)$

c) $(x^3 + 7x^2 + 7x - 16) : (x + 4)$

b) $(4x^2 + 6x + 7) : (2x + 1)$

d) $(3x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x) : (3x - 1)$

Zwróćmy uwagę, że wykonując dzielenie wielomianu w przez dwumian $ax + b$, otrzymujemy jako iloraz pewien wielomian p oraz resztę r , która jest liczbą.

Ćwiczenie 3

Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r$, gdzie wielomian p jest ilorazem, a r – resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian q .

- a) $w(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $q(x) = x - 2$
- b) $w(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4$, $q(x) = x + 3$
- c) $w(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x$, $q(x) = x - 1$
- d) $w(x) = 3x^4 - x^2 + 9x - 1$, $q(x) = x + 2$

Jeśli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian q jest równa zeru, to mówimy, że wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

1. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q ?

- a) $w(x) = 2x^2 - 5x - 12$, $q(x) = x - 4$
- b) $w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x + 2$
- c) $w(x) = -2x^4 + 3x^2 + 6$, $q(x) = x - 3$
- d) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9$, $q(x) = x + 3$
- e) $w(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$, $q(x) = x - 1$

2. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r$.

- a) $w(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $q(x) = x - 4$
- b) $w(x) = x^3 + 3x + 7$, $q(x) = x + 3$
- c) $w(x) = 3x^4 - x^2$, $q(x) = x - 1$
- d) $w(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 4$, $q(x) = x + 6$
- e) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x - 2$, $q(x) = x + \frac{1}{2}$
- f) $w(x) = 12x^3 + x^2 - x + 3$, $q(x) = x - \frac{1}{4}$

3. Wykonaj dzielenie wielomianu w przez dwumian q . Zapisz wielomian w w postaci $w(x) = p(x)q(x) + r$.

- a) $w(x) = 4x^3 + 8x^2 + 4x - 9$, $q(x) = 2x + 1$
- b) $w(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 7$, $q(x) = 3x - 1$
- c) $w(x) = 6x^3 + 5x^2 - 4x - 1$, $q(x) = 3x + 4$
- d) $w(x) = x^3 + 4x^2 - 11x + 2$, $q(x) = \frac{1}{2}x + 3$

1.8. Równość wielomianów

Dwa wielomiany są równe, gdy są zerowe lub gdy mają ten sam stopień i mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej.

Ćwiczenie 1

Czy istnieje taka wartość parametru a , że wielomian $w(x) = 3ax^2 - x + 2a^2$ jest równy wielomianowi u ?

a) $u(x) = 6x^2 - x + 8$ b) $u(x) = 3x^2 - x + 1$ c) $u(x) = -9x^2 - x + 18$

Przykład 1

Dla jakiej wartości parametru m prawdziwa jest poniższa równość?

$$(3x^3 + 8x^2 - 5x - 6) : (x + m) = 3x^2 - x - 2$$

Chcemy sprawdzić, dla jakiej wartości m zachodzi równość wielomianów:

$$3x^3 + 8x^2 - 5x - 6 = (3x^2 - x - 2)(x + m)$$

Wykonujemy mnożenie:

$$\begin{aligned}(3x^2 - x - 2)(x + m) &= 3x^3 + 3mx^2 - x^2 - mx - 2x - 2m = \\ &= 3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m\end{aligned}$$

Aby wielomiany: $3x^3 + 8x^2 - 5x - 6$ oraz $3x^3 + (3m - 1)x^2 - (m + 2)x - 2m$ były równe, spełnione muszą być równości:

$$3m - 1 = 8 \quad \text{współczynniki przy } x^2 \text{ muszą być równe}$$

$$-m - 2 = -5 \quad \text{współczynniki przy } x \text{ muszą być równe}$$

$$-2m = -6 \quad \text{wyrazy wolne muszą być równe}$$

Wszystkie trzy równości są jednocześnie prawdziwe dla $m = 3$.

Przykład 2

Wyznacz wartość parametru a tak, aby iloczyn wielomianów $f(x) = ax - 4$ i $g(x) = ax - 1$ był równy wielomianowi $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$.

Wyznaczamy iloczyn $f \cdot g$:

$$f(x) \cdot g(x) = (ax - 4)(ax - 1) = a^2x^2 - ax - 4ax + 4 = a^2x^2 - 5ax + 4$$

Aby wielomiany $f(x) \cdot g(x) = a^2x^2 - 5ax + 4$ oraz $h(x) = 9x^2 + 15x + 4$ były równe, muszą być równe współczynniki przy tych samych potęgach, czyli:

$$a^2 = 9, \text{ stąd } a = -3 \text{ lub } a = 3$$

$$-5a = 15, \text{ stąd } a = -3$$

Obie równości są jednocześnie spełnione dla $a = -3$.

Ćwiczenie 2

Dla jakiej wartości parametru m prawdziwa jest równość:

a) $(x^4 - 2x^2 - 5x + 2) : (x - m) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1$,

b) $(x^3 - 2x^2 - 23x + 60) : (x - m) = x^2 + 2x - 15$?

Ćwiczenie 3

Dla jakiej wartości parametru m iloczyn wielomianów f i g jest równy wielomianowi h ?

a) $f(x) = x - m$, $g(x) = x + 7$, $h(x) = x^2 + 4x - 21$

b) $f(x) = \frac{1}{2}mx - 2$, $g(x) = x + 2m + 1$, $h(x) = x^2 + 3x - 10$

c) $f(x) = mx + 1$, $g(x) = x - 2m$, $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$

ZADANIA

1. Dla jakiej wartości parametru a prawdziwa jest równość:

a) $x^3 - x^2 - x - 15 = (x^2 + ax + 5)(x - 3)$,

b) $x^3 + x^2 - 17x - 20 = (x^2 + ax - 5)(x + 4)$,

c) $2x^3 - 4x^2 - 7x + 18 = (2x^2 + ax + 9)(x + 2)$?

2. Dla jakich wartości parametrów a i b wielomian $u \cdot v - w$ jest wielomianem zerowym?

a) $u(x) = -x + 4$, $v(x) = 2x^2 + ax + b$, $w(x) = -2x^3 + 6x^2 + 5x + 12$

b) $u(x) = 2ax + b$, $v(x) = x^2 - x$, $w(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$

3. Dla jakich wartości parametrów a i b prawdziwa jest równość:

a) $-x^4 + 5x^3 - x^2 + 8x - 15 = (-x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 5)$,

b) $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 3)(x - 1)$,

c) $2x^4 - 3x^3 + 7x + 3 = (2x^3 + ax^2 + bx + 6)(x + \frac{1}{2})$?

4. Przedstaw wielomian w jako iloczyn dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

a) $w(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$

b) $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 5x - 1$

*c) $w(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$

*d) $w(x) = x^4 + x^3 - 6x^2 - 11x - 5$

*1.9. Twierdzenie Bézouta

Wykonując dzielenie wielomianu w przez dwumian $x - a$, otrzymujemy iloraz p oraz resztę r . Czasami interesuje nas tylko reszta z dzielenia – wówczas możemy postąpić jak w poniższym przykładzie.

Przykład 1

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = \frac{1}{8}x^3 + x^2 - 3x - 5$ przez dwumian $x - 4$.

Wielomian w zapisujemy w postaci $w(x) = p(x)(x - 4) + r$. Dla $x = 4$:

$$w(4) = p(4)(4 - 4) + r = 0 + r = r$$

Obliczamy resztę z dzielenia wielomianu w przez $x - 4$:

$$r = w(4) = \frac{1}{8} \cdot 4^3 + 4^2 - 3 \cdot 4 - 5 = 8 + 16 - 12 - 5 = 7$$

TWIERDZENIE O RESZCIE

Jeśli r jest resztą z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$, to $r = w(a)$.

Ćwiczenie 1

Udowodnij twierdzenie o reszcie, korzystając z tego, że wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)(x - a) + r$.

Przykład 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$ przez dwumian $x + 2$, nie wykonując dzielenia.

$$r = w(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 5 = -16 + 12 + 2 + 5 = 3$$

Ćwiczenie 2

Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.

a) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$, $q(x) = x - 3$

b) $w(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

c) $w(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1$, $q(x) = x + 1$

d) $w(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x + 6$, $q(x) = x + 2$

Rozważmy przypadek, gdy reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - a$ jest równa zeru, czyli gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$. Mówi o tym poniższe twierdzenie.

TWIERDZENIE BÉZOUTA

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Zwrot „wtedy i tylko wtedy, gdy” w twierdzeniu Bézouta [czyt. bezu] oznacza, że jednocześnie prawdziwe są dwa zdania:

Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w , to wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$.

Jeżeli wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, to liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w .

Dowód

Założmy, że liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w , czyli $w(a) = 0$. Jeśli podzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$, to otrzymamy wielomian p i resztę r :

$$w(x) = p(x)(x - a) + r$$

Podstawiamy $x = a$:

$$w(a) = p(a)(a - a) + r = r$$

Ale $w(a) = 0$, więc $r = 0$, co oznacza, że wielomian w jest podzielny przez $x - a$.

Założmy teraz, że wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - a$, czyli istnieje taki wielomian p , że $w(x) = p(x)(x - a)$. Wówczas $w(a) = p(a)(a - a) = 0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu w .

Przykład 3

Który z wielomianów: $w(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$ czy $u(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 6$, jest podzielny przez dwumian $x - 2$?

$w(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 10 = 8 + 8 - 6 - 10 = 0$, zatem wielomian w jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

$u(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 8 - 20 + 4 - 6 = -14 \neq 0$, zatem wielomian u nie jest podzielny przez dwumian $x - 2$.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy wielomian w jest podzielny przez dwumian q .

a) $w(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 1$, $q(x) = x - 1$

b) $w(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 9$, $q(x) = x + 1$

c) $w(x) = -x^4 + x^3 + 3x^2 + 11$, $q(x) = x - 3$

d) $w(x) = x^4 + 8x^2 + 2x + 16$, $q(x) = x + 2$

W pewnych przypadkach znajomość jednego z pierwiastków wielomianu umożliwia znalezienie pozostałych pierwiastków.

Przykład 4

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Wyznacz jego pozostałe pierwiastki.

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu w , więc na podstawie twierdzenia Bézouta wielomian ten można przedstawić w postaci:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = p(x)(x - 2)$$

Wielomian p znajdujemy, wykonując dzielenie:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -2x^2 + x + 6 \\ \underline{-2x^2 + 4x} \\ -3x + 6 \\ \underline{-3x + 6} \\ 0 \end{array}$$

Zatem $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3)(x - 2)$.

Pozostałymi pierwiastkami wielomianu w są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 3$. Są to liczby -1 i 3 .

Ćwiczenie 4

Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.

- a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, $a = -4$
- b) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, $a = 1$
- c) $w(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$, $a = -2$
- d) $w(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, $a = 3$

Jeśli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia w , to pozostałe pierwiastki tego wielomianu (jeżeli istnieją) możemy wyznaczyć w następujący sposób:

1. Dzielimy wielomian w przez dwumian $x - a$.
2. Otrzymany iloraz jest trójmianem kwadratowym, którego pierwiastki, o ile istnieją, są pozostałymi pierwiastkami wielomianu w . Wyznaczamy te pierwiastki.

ZADANIA

1. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez dwumian q , nie wykonując dzielenia.
 - a) $w(x) = -3x^3 + 11x^2 + 8x - 6$, $q(x) = x + 1$
 - b) $w(x) = -2x^4 + 10x^2 + x - 8$, $q(x) = x - 2$
 - c) $w(x) = 8x^3 + 4x^2 + 4x - 4$, $q(x) = x - \frac{1}{2}$

2. Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz jego pozostałe pierwiastki. Rozłóż wielomian w na czynniki.
- a) $w(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 14, a = 1$
 - b) $w(x) = 2x^3 + 9x^2 + 13x + 6, a = -2$
 - c) $w(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 20, a = -5$
3. Sprawdź, która z liczb: $-1, 1$ czy 2 jest pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.
- a) $w(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$
 - c) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$
 - b) $w(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$
 - d) $w(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$
4. Dla jakich wartości parametru m wielomian w jest podzielny przez q ?
- a) $w(x) = x^3 + 5x^2 + mx + 3, q(x) = x + 3$
 - b) $w(x) = -2x^3 + m^2x^2 + x - 6, q(x) = x - 2$
 - c) $w(x) = m^2x^3 + mx^2 + x + 7, q(x) = x + 1$
5. Sprawdź, nie wykonując dzielenia, czy wielomian w jest podzielny przez wielomian u .
- a) $w(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3, u(x) = (x - 1)(x + 3)$
 - b) $w(x) = 7x^3 - 6x^2 + 3x + 1, u(x) = 2x^2 + x - 1$
 - c) $w(x) = 4x^4 + x^3 - 19x^2 - 4x + 12, u(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$

Jeśli q jest wielomianem drugiego stopnia, to wielomian w można przedstawić w postaci $w(x) = p(x)q(x) + ax + b$, gdzie $ax + b$ jest resztą z dzielenia wielomianu w przez wielomian q .

6. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu w przez:
- a) $(x - 3)(x + 2)$, jeżeli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 3$ wynosi 7 , a przez dwumian $x + 2$ wynosi -3 ,
 - b) $x^2 - 3x + 2$, jeżeli reszta z dzielenia wielomianu w przez dwumian $x - 1$ wynosi -1 , a przez dwumian $x - 2$ wynosi 3 .
7. Oblicz resztę z dzielenia wielomianu w przez wielomian u , nie wykonując dzielenia.
- a) $w(x) = x^7 - 33x + 11, u(x) = (x + 1)(x - 2)$
 - b) $w(x) = x^{99} - 1, u(x) = x^2 - 1$
 - c) $w(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1, u(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

*1.10. Pierwiastki całkowite i pierwiastki wymierne wielomianu

Aby znaleźć pierwiastki całkowite równania o współczynnikach całkowitych, możemy skorzystać z twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu.

TWIERDZENIE O PIERWIASTKACH CAŁKOWITYCH

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 .

Dowód

Założmy, że $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$ oraz liczba całkowita x_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Wówczas:

$$a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

$$a_0 = -a_n x_1^n - a_{n-1} x_1^{n-1} - \dots - a_1 x_1 = x_1 (-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1} x_1^{n-2} - \dots - a_1)$$

Liczba $-a_n x_1^{n-1} - a_{n-1} x_1^{n-2} - \dots - a_1$ jest całkowita, więc x_1 jest dzielnikiem a_0 .

Przykład 1

Znajdź pierwiastki całkowite wielomianu $w(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Zgodnie z twierdzeniem, pierwiastków całkowitych wielomianu w szukamy wśród dzielników wyrazu wolnego $a_0 = 3$, czyli wśród liczb: $-1, 1, -3$ i 3 .

$$w(-1) = -2 + 3 + 8 + 3 \neq 0 \quad \text{liczba } -1 \text{ nie jest pierwiastkiem wielomianu } w$$

$$w(1) = 2 + 3 - 8 + 3 = 0 \quad \text{liczba } 1 \text{ jest pierwiastkiem wielomianu } w$$

$$w(-3) = -54 + 27 + 24 + 3 = 0 \quad \text{liczba } -3 \text{ jest pierwiastkiem wielomianu } w$$

$$w(3) = 54 + 27 - 24 + 3 \neq 0 \quad \text{liczba } 3 \text{ nie jest pierwiastkiem wielomianu } w$$

Zatem jedynymi pierwiastkami całkowitymi wielomianu w są liczby 1 i -3 .

Wielomian w z przykładu 1. ma jeszcze jeden pierwiastek niebędący liczbą całkowitą. Jest nim liczba $\frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie dzielniki całkowite wyrazu wolnego wielomianu w i sprawdź, które z nich są jego pierwiastkami.

a) $w(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

c) $w(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $w(x) = 3x^3 + 10x^2 - 9x - 4$

d) $w(x) = x^4 - 7x^2 + 10$

Przykład 2

Rozwiąż równanie $5x^3 - 8x^2 - 5x + 2 = 0$.

Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 2$ są liczby: $-1, 1, -2, 2$. Obliczamy wartości wielomianu dla tych liczb:

$$w(-1) = -6 \neq 0, \quad w(1) = -6 \neq 0, \quad w(-2) = -60 \neq 0, \quad w(2) = 0$$

Zatem liczba 2 jest jedynym pierwiastkiem całkowitym równania.

Wykonujemy dzielenie:

$$(5x^3 - 8x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = 5x^2 + 2x - 1$$

i wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $5x^2 + 2x - 1$:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{6}}{5}$$

które są pozostałymi pierwiastkami równania.

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie. Znajdź najpierw pierwiastki całkowite.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

c) $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = 0$

b) $3x^3 + 3x^2 - 5x + 2 = 0$

d) $4x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = 0$.

Wyraz wolny $a_0 = 9$ ma następujące dzielniki: $-1, 1, -3, 3, -9, 9$. Stwierdzamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem całkowitym tego równania. Zatem wielomian $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9$ jest podzielny przez $x - 1$:

$$(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9) : (x - 1) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$$

Otrzymany wielomian rozkładamy na czynniki, grupując wyrazy:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 3x - 9 &= x^2(x + 3) - 3(x + 3) = (x^2 - 3)(x + 3) = \\ &= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3) \end{aligned}$$

Stąd:

$$x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 9 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 3)$$

a zatem rozwiązaniami równania są liczby: $-3, -\sqrt{3}, 1$ i $\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 20x + 15 = 0$

d) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 = 0$

b) $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0$

e) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

c) $2x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$

f) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 12x + 4 = 0$

Poniższe twierdzenie pozwala wyznaczyć pierwiastki wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych.

TWIERDZENIE O PIERWIASTKACH WYMIERNYCH

Jeżeli wielomian $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0, a_0 \neq 0$) o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny $x = \frac{p}{q}$ i p, q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a q jest dzielnikiem a_n .

Ćwiczenie 4

Współczynniki wielomianu w są liczbami całkowitymi. Które z podanych liczb nie mogą być pierwiastkami wielomianu w ?

a) $-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$; $w(x) = -4x^6 + \dots - 1$

b) $-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$; $w(x) = 4x^7 + \dots - 2$

c) $-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$; $w(x) = 2x^5 + \dots + 3$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

c) $2x^3 + 9x^2 + x - 3 = 0$

b) $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

d) $9x^4 + 9x^3 + 11x^2 + 9x + 2 = 0$

ZADANIA

1. Rozwiąż równanie.

a) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$

e) $3x^3 + 11x^2 - 3x + 4 = 0$

b) $x^3 - 7x - 6 = 0$

f) $5x^2 - 2x = 1 - 6x^3$

c) $2x^3 + 9x^2 + 10x + 3 = 0$

g) $x^3 - 6 = 4x^2 - 5x$

d) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0$

h) $-3x^3 + 15x^2 - 20x + 6 = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x = 0$

d) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 6x + 4 = 0$

e) $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 19x - 6 = 0$

c) $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$

f) $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 6x + 1 = 0$

3. Rozwiąż równanie.

a) $2x^3 + x^2 + x = 1$

c) $-4x + 4 = 3x^3 + x^2$

b) $3x^3 - x = 1 - 7x^2$

d) $2x^4 + 5x^3 = 8x^2 + 5x$

4. Rozwiąż równanie.

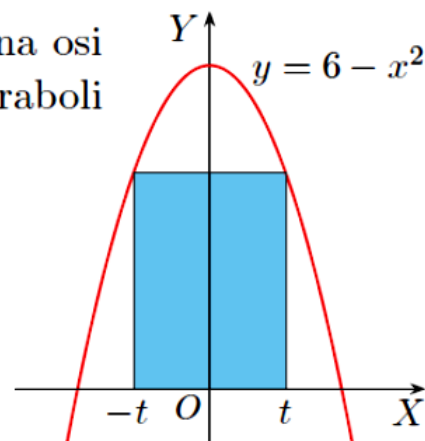
a) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$

c) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = x + \frac{1}{2}$

b) $\frac{x^3+x^2}{15} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}$

d) $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 = (3x-9)(2x^2+x)$

5. Dwa wierzchołki prostokąta (rysunek obok) leżą na osi OX , a dwa pozostałe – nad osią OX i należą do paraboli o równaniu $y = 6 - x^2$.

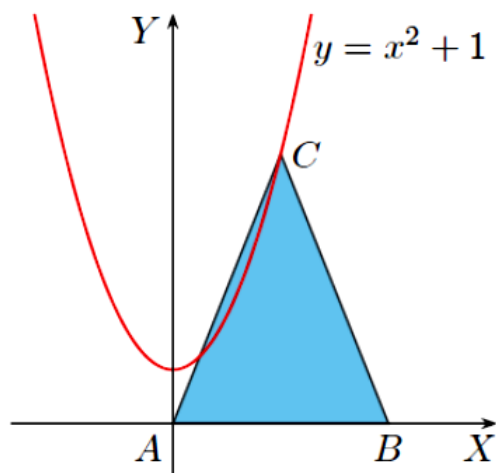


a) Podaj wzór wielomianu opisującego pole tego prostokąta w zależności od t . Jaka jest dziedzina tej funkcji?

b) Dla jakiej wartości t pole tego prostokąta jest równe 8?

6. Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi OX , dwa pozostałe należą do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego prostokąta, jeżeli jego pole jest równe 39.

7. Na rysunku obok przedstawiono trójkąt równoramienny o podstawie AB i wierzchołkach $A(0,0)$, $B(x_0,0)$, gdzie $x_0 > 0$, oraz wierzchołku C należącym do paraboli $y = x^2 + 1$.

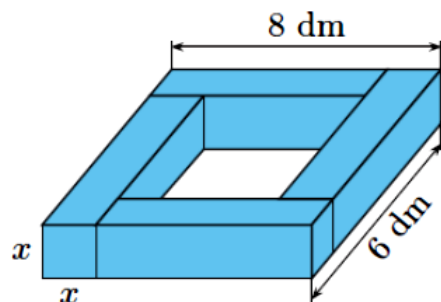


a) Podaj wzór wielomianu opisującego pole tego trójkąta w zależności od x_0 . Jaka jest dziedzina tej funkcji?

b) Wyznacz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta, jeśli jego pole jest równe 10.

8. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o wierzchołkach $A(x_0, 0)$ i $B(-x_0, 0)$, gdzie $x_0 > 0$, które są końcami jednej z przyprostokątnych. Wierzchołek C należy do paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$. Oblicz obwód tego trójkąta, jeśli jego pole jest równe 8.

9. Fragment drewnianej konstrukcji (rysunek obok) został wyprodukowany z belek, których przekrój jest kwadratem o boku x .



a) Wyraż objętość tej konstrukcji jako funkcję zmiennej x . Podaj dziedzinę tej funkcji.

b) Wyznacz x , jeśli objętość bryły, którą tworzy ta konstrukcja, jest równa 24 dm^3 .

c) Wyznacz pole powierzchni całkowitej bryły, którą tworzy ta konstrukcja, jeśli jej objętość jest równa 80 dm^3 .

*1.11. Pierwiastki wielokrotne

Przykład 1

Wyznacz pierwiastki wielomianu $w(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$.

$$w(x) = x(x^2 - 8x + 16) = x(x - 4)^2$$

Zatem pierwiastkami wielomianu w są liczby 0 i 4.

W rozkładzie na czynniki wielomianu $w(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$ czynnik $x - 4$ występuje dwa razy. Dlatego liczbę 4 nazywamy **pierwiastkiem dwukrotnym** (podwójnym) wielomianu w . Liczba 0 jest **pierwiastkiem jednokrotnym** (pojedynczym) tego wielomianu.

DEFINICJA

Jeżeli w rozkładzie wielomianu w na czynniki występuje czynnik $(x - a)^k$ i nie występuje czynnik $(x - a)^{k+1}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, to liczbę a nazywamy **pierwiastkiem k -krotnym** wielomianu w .

Przykład 2

Podaj pierwiastki wielomianu w i określ krotność każdego z nich.

a)

$$w(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$$

pierwiastki: 0 -2 3

krotność: trzykrotny jednokrotny dwukrotny

b)

$$w(x) = x^2(x^2 - 9)(x + 3)^3 = x^2(x - 3)(x + 3)(x + 3)^3 = x^2(x - 3)(x + 3)^4$$

pierwiastki: 0 3 -3

krotność: dwukrotny jednokrotny czterokrotny

Ćwiczenie 1

Czy liczba 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu w ?

a) $w(x) = (x - 2)(x^2 - 4)$

b) $w(x) = (x - 2)^2(x^2 - x - 2)$

Ćwiczenie 2

Podaj pierwiastki wielomianu w oraz określ krotność każdego z nich.

a) $w(x) = x^4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2(x - 1)$

c) $w(x) = (x - 4)^3(x^2 - 16)$

b) $w(x) = -3x(x^2 + 1)(x^2 + 2)$

d) $w(x) = 7x(x - 2)(5x + 3)(x^2 - 4)^2$

Możemy mówić również o pierwiastkach jednokrotnych lub wielokrotnych równania wielomianowego $w(x) = 0$.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$. Podaj krotność każdego pierwiastka.

Pierwiastków całkowitych wielomianu $w(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ szukamy wśród dzielników jego wyrazu wolnego: $w(-1) = -4 - 7 - 2 + 1 \neq 0$, $w(1) = 4 - 7 + 2 + 1 = 0$, czyli liczba 1 jest pierwiastkiem.

Wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r} (4x^3 - 7x^2 + 2x + 1) : (x - 1) = 4x^2 - 3x - 1 \\ \underline{4x^3 - 4x^2} \\ -3x^2 + 2x + 1 \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

Wyznaczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego $4x^2 - 3x - 1$:

$$\Delta = 9 + 16 = 25, \quad x_1 = \frac{3-5}{8} = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3+5}{8} = 1$$

Zatem pierwiastkami równania $4x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$ są liczby $-\frac{1}{4}$ i 1. Równanie można zapisać w postaci $4(x - 1)^2(x + \frac{1}{4}) = 0$, więc liczba 1 jest pierwiastkiem dwukrotnym, a liczba $-\frac{1}{4}$ – pierwiastkiem jednokrotnym.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.

a) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

c) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x = 0$

b) $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$

d) $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$

TWIERDZENIE

Wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

Powyższe twierdzenie jest prostym wnioskiem z twierdzenia Bézouta.

Ćwiczenie 4

Dla wielomianu w podano jego pierwiastki całkowite wraz z krotnością każdego z nich. Czy wielomian ten może mieć jeszcze inne pierwiastki?

a) $w(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{2}x + 3$, pierwiastki jednokrotne: 1, 2, -3

b) $w(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$, pierwiastki jednokrotne: -2, 3

1. Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.

a) $(2x + 1)(x^2 + x - 6) = 0$

e) $(x^2 - 9)(x + 3)^2 = 0$

b) $(x + 1)^2(2x - 4) = 0$

f) $(x^2 - x - 6)(x^2 + x - 1) = 0$

c) $(5 - x)(x^2 - 7x + 10) = 0$

g) $(x^2 - 4)^2(x^4 + 3x^3 - 10x^2) = 0$

d) $(x^2 + 2x - 3)(x - 1)^3 = 0$

h) $(x^3 + x^2 - 12x)(x^4 - 5x^3 + 6x^2) = 0$

2. Uzasadnij, że równanie nie ma pierwiastków wielokrotnych.

a) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

c) $2x^3 + 8x^2 + 9x + 2 = 0$

b) $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = 0$

d) $x^3 + 6x^2 + 8x + 15 = 0$

3. Rozwiąż równanie. Podaj krotność każdego pierwiastka.

a) $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$

d) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

g) $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$

b) $x^5 - 6x^4 + 9x^3 = 0$

e) $x^4 + 4x^3 + 5x^2 = 0$

h) $3x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

c) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

f) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 = 0$

i) $x^7 - 16x^3 = 0$

4. Liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w . Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

a) $w(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4, x_0 = 2$

b) $w(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3, x_0 = -1$

c) $w(x) = -12x^3 + 16x^2 - 7x + 1, x_0 = \frac{1}{2}$

5. Podaj przykład wielomianu, którego jedynymi pierwiastkami są liczby: -3 , 2 , 4 i którego stopień jest równy: a) 3 , b) 4 , c) 6 .

6. Podaj przykład wielomianu o wyrazie wolnym $a_0 = 2$, który ma tylko jeden pierwiastek dwukrotny równy 3 i którego stopień jest równy:

a) 2 ,

b) 4 ,

c) 6 .

7. Dla jakich wartości parametru a liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w ?

a) $w(x) = (x + 3)(x^2 + ax + 6), x_0 = -3$

b) $w(x) = (2x^2 - 7x - 4)(x^2 - 4a^2), x_0 = 4$

8. Dla jakich wartości parametrów a, b liczba x_0 jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu w ?

a) $w(x) = 6x^4 + 8x^3 - 8x^2 + ax + b, x_0 = -1$

b) $w(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx + 4, x_0 = 2$